Краткие сообщения ОИЯИ №11-85 JINR Rapid Communications №11-85
УДК 539.12.01

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И РАЗЛИЧНЫЕ БАЗИСЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $\widetilde{SL}(2,R)$

Н.М.Атакишиев*, Р.М.Мир-Касимов

Рассматривается точно решаемая задача для разностного уравнения Шредингера в релятивистском конфигурационном пространстве. Потенциал задачи является обобщением нерелятивистского осцилляторного потенциала. В частности, динамическая группа симметрии разностного уравнения Шредингера совпадает с динамической группой нерелятивистского осциллятора. Реализация динамической группы в терминах волновых функций разностного уравнения Шредингера /полиномов Поллачека/ используется для нахождения связи между матричными элементами представлений при различных редукциях и матричных элементов буста.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Relativistic Oscillator Wave Functions and Different Bases of the $\widetilde{SL}$ (2,R) Group Representations

N.M.Atakishiev, R.M.Mir-Kasimov

The exactly soluble problem for the finite-difference Schrödinger equation in the relativistic configurational space is considered. The potential of the problem is the generalization of the nonrelativistic oscillator potential. In particular the dynamical group of symmetry for the finite-difference Schrödinger equation coincides with the dynamical group of symmetry of the nonrelativistic oscillator. The realization of dynamical group in terms of the wave fuction of the finite difference Schrödinger equation is used for establishing the connection between the matrix elements of representations for different reductions and for matrix elements of the boost.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

* Институт физики АН АзССР, Баку

В рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля [1,2] в работах [3-5] была рассмотрена релятивистская модель линейного осциллятора с той же самой динамической группой симметрии $SL(2,R)$, что и в нерелятивистском случае. Были найдены волновые функции и явная реализация генераторов группы симметрии как в импульсном, так и в релятивистском конфигурационном x-пространстве [6]. Полученные решения в x-пространстве, выражающиеся через полиномы Поллачека [4], интересны и с теоретико-групповой точки зрения, поскольку они являются коэффициентами преобразования между базисами собственных функций компактного $SO(2)$ и некомпактного $SO(1,1)$ генераторов группы $SL(2,R)$. В данной работе показано, что с помощью явного выражения для волновых функций релятивистского осциллятора [3,4] удается получить простые формулы для коэффициентов преобразования и матричных элементов буста, относящихся к дискретной серии представлений универсальной накрывающей группы $\widetilde{SL}(2,R)$.

1. Волновые функции линейного релятивистского осциллятора в p-представлении [3-5] можно записать в виде

$$\Psi_n(p) = i^n \left(\frac{\eta}{2mc}\right)^{1/2} \Phi_n^{\nu}(\eta), \qquad /1/$$

где $\eta^2 = \frac{2c}{\hbar\omega} p^+$, $p^+ = p_0 + p$ есть переменная светового фронта, параметр $2\nu = 1 + (4\mu^2 + 1)^{1/2}$, $\mu = mc^2/\hbar\omega$, а функция

$$\Phi_n^{\nu}(\eta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+2\nu)}\right]^{1/2} \eta^{2\nu - 1/2} e^{-\eta^2/2} L_n^{2\nu-1}(\eta^2), \qquad /2/$$

выражается через обобщенные полиномы Лагерра $L_n^{a}(x)$. Фазы в /1/ выбраны таким образом, что при $c \to \infty$ $\Psi_n(p)$ совпадают с волновыми функциями нерелятивистского линейного осциллятора.

Как следует из /1/, матричные элементы произвольного оператора A в p-представлении

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_p \Psi_n^*(p) A \Psi_{n'}(p) = \int_0^{\infty} d\eta\, \Phi_n^{\nu}(\eta) \tilde{A} \Phi_{n'}^{\nu}(\eta),$$

где $d\Omega_p = mcdp^+/p^+ = 2mcd\eta/\eta$ есть инвариантный элемент интегрирования в p-представлении, а $\tilde{A} = \eta^{-1/2} A \eta^{1/2}$.
В частности, для гамильтониана $H(p) \equiv \hbar\omega K_0$ повышающего K_+ и понижающего K_- операторов, являющихся генераторами

динамической группы симметрии $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathrm{R})$ для модели осциллятора, описываемой $H(p)$, мы получаем следующую связь с используемой в [7] реализацией:

$$\tilde{K}_0 = J_0^{\gamma}, \quad \tilde{K}_{\pm} = \pm i(\tilde{K}_1 \pm i\tilde{K}_2), \quad \tilde{K}_1 = J_1^{\gamma}, \quad \tilde{K}_2 = J_2^{\gamma}. \qquad /3/$$

где $\gamma = (2\nu - 1)^2 - 1/4$. В рассмотренном нами случае осциллятора значения параметра ν лежат в интервале $1 \leq \nu < \infty$. Однако формулы /1/, /2/ и /3/ могут быть использованы для описания неприводимых унитарных представлений /НУП/ группы $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathrm{R})$ и при значениях этого параметра $1/2 < \nu < 1$, где нижняя граница определяется исходя из требования, что генераторы /3/ должны иметь ограниченный снизу спектр*. Функции $\Psi_n(p)$ задают базис для положительной дискретной серии $D^+(\nu)$ НУП группы $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathrm{R})$, соответствующий $\mathrm{SO}(2)$ редукции /ср. с [7]/.

2. Волновые функции линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном x-представлении

$$\Psi_n(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int d\Omega_p\, \xi(p,x)\, \Psi_n(p), \qquad /4/$$

определяются с помощью разложения по матричным элементам представлений группы движений пространства Лобачевского

$$\xi(p,x) = \left(\frac{p_0 - p}{mc}\right)^{-i\tilde{x}} = \left(\frac{\eta^2}{2\mu}\right)^{i\tilde{x}}, \qquad /5/$$

где $\tilde{x} = x/\lambda$ есть безразмерная переменная, а $\lambda = \hbar/mc$ - комптоновская длина волны. Функции $\xi(p,x)$ являются собственными функциями $K_2\xi(p,x) = \tilde{x}\xi(p,x)$ некомпактного генератора K_2 и образуют ортонормированный на δ-функцию базис, соответствующий редукции $\mathrm{SL}(2,\mathrm{R}) \supset \mathrm{SO}(1,1)$ [7-10]. Они следующим образом связаны с используемыми в [7] собственными функциями $\Phi_{\tilde{x}}(\eta)$ оператора K_2:

$$\xi(p,x) = (\pi\eta)^{1/2}\, (2\mu)^{-i\tilde{x}}\, \Phi_{\tilde{x}}(\eta). \qquad /5'/$$

В конфигурационном x-представлении генераторам /3/ соответствуют разностные операторы

---

*Поскольку НУП отрицательной дискретной серии $D^-(\nu)$ получаются из НУП положительной дискретной серии $D^+(\nu)$ с помощью внешнего автоморфизма $K_0 \leftrightarrow -K_0$, $K_1 \leftrightarrow -K_1$, $K_2 \leftrightarrow K_2$ алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{R})$, то в данной работе будет рассматриваться лишь $D^+(\nu)$ серия.

$$\mathcal{K}_+ \equiv K_0 + K_1 = \mu^{-1}[\tilde{x}(\tilde{x}+i)+\mu^2]\, e^{i\frac{d}{d\tilde{x}}} ,$$

$$\mathcal{K}_- \equiv K_0 - K_1 = \mu e^{-i\frac{d}{d\tilde{x}}} , \qquad K_2 = -\tilde{x} . \qquad /6/$$

Отметим, что в качестве одного из возможных примеров реализации генераторов группы $SL(2,R)$, возникающей при редукции относительно некомпактной подгруппы $SO(1,1)$, в /10/ приведен случай, когда

$$J_2 = \lambda , \quad J_- = -e^{i\frac{d}{d\lambda}} , \quad J_+ = f(\lambda)e^{-i\frac{d}{d\lambda}} , \quad f(\lambda) = \lambda(\lambda - i) + j(j+1) . \qquad /7/$$

Нетрудно убедиться, что если положить $\lambda = -\tilde{x}$, а $j = \nu - 1$, то мы получаем следующую связь между генераторами /7/ и /6/: $J_2 = K_2$, $J_\pm = \pm\mu^{\pm 1}\mathcal{K}_\pm$.

3. Как известно, коэффициенты преобразования

$$C_n^{(\nu)}(\tilde{x}) \equiv (\Phi_{\tilde{x}}, \Phi_n^\nu) = \int_0^\infty d\eta\, \Phi_{\tilde{x}}^*(\eta)\Phi_n^\nu(\eta) \qquad /8/$$

связывают "координаты" $f(\tilde{x}) \equiv (\Phi_{\tilde{x}}, f)$ произвольной функции $f(\eta)$ из $L^2(R^+)$ в базисе собственных функций некомпактного генератора $\tilde{K}_2$ с ее "координатами" $f_n^{(\nu)} \equiv (\Phi_n^\nu, f)$ в базисе собственных функций компактного генератора $\tilde{K}_0$, т.е.

$$f(\tilde{x}) = \sum_{n=0}^\infty f_n^{(\nu)} C_n^{(\nu)}(\tilde{x}) , \qquad f_n^{(\nu)} = \int_{-\infty}^\infty d\tilde{x}\, C_n^{*(\nu)}(\tilde{x}) f(\tilde{x}) . \qquad /9/$$

Используя явное выражение для волновых функций /4/:

$$\Psi_n(x) = 2^\nu \left[\frac{n!}{2\pi\lambda\Gamma(n+2\nu)}\right]^{1/2} \mu^{-i\tilde{x}}\, \Gamma(\nu + i\tilde{x})\, P_n^\nu(\tilde{x}, \frac{\pi}{2}) \qquad /4'/$$

через полиномы Поллачека $P_n^\nu(x;\phi)$ и подставляя в /4/ соотношения /1/ и /5'/, легко показать, что

$$C_n^{(\nu)}(x) = i^n \left[\frac{n!}{2\pi\Gamma(n+2\nu)}\right]^{1/2} 2^{\nu - ix}\, \Gamma(\nu - ix)\, P_n^\nu(x; \frac{\pi}{2}) . \qquad /10/$$

Ортогональность коэффициентов преобразования /10/

$$\int_{-\infty}^\infty dx\, C_n^{*(\nu)}(x) C_{n'}^{(\nu)}(x) = \delta_{nn'} , \qquad /11/$$

согласуется с условием ортогональности для полиномов Поллачека

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P_n^{\nu}(x;\frac{\pi}{2}) P_{n'}^{\nu}(x;\frac{\pi}{2})\rho^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!}\delta_{nn'}, \qquad /12/$$

где $\rho^{(\nu)}(x) = 2^{2\nu}(2\pi)^{-1}|\Gamma(\nu+ix)|^2$. Под действием произвольного конечного элемента $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $SL(2,R)$ коэффициенты $C_n^{(\nu)}(\tilde{x})$ преобразуются в

$$[U^{\nu}(g)C_n^{(\nu)}](\tilde{x}) = [\frac{a-ib}{a+ib}]^{n+\nu}(a^2+b^2)^{-i\tilde{x}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\frac{i}{2}(ac+bd)]^k C_n^{(\nu)}(\tilde{x}+ik). \qquad /13/$$

В тех случаях, когда g принадлежит однопараметрическим компактной $\exp(i\gamma\tilde{K}_0)$ и некомпактной $\exp(i\beta\tilde{K}_2)$ подгруппам, преобразование /13/ сводится просто к умножению соответственно на $\exp[i\gamma(n+\nu)]$ и $\exp(i\beta\tilde{x})$.

4. Как следует из определения /8/ коэффициентов преобразования $C_n^{(\nu)}(x)$, матричные элементы $D_{nn'}^{\nu}(g) \equiv (\Phi_n^{\nu}, U^{\nu}(g)\Phi_{n'}^{\nu})$ в $SO(2)$ базисе связаны с матричными элементами $D_{\tilde{x}\tilde{x}'}^{\nu} \equiv (\Phi_{\tilde{x}}, U^{\nu}(g)\Phi_{\tilde{x}'})$ в $SO(1,1)$ базисе соотношением

$$D_{nn'}^{\nu}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \overset{*}{C}{}_n^{(\nu)}(x) D_{xx'}^{\nu}(g) C_{n'}^{(\nu)}(x'). \qquad /14/$$

В частном случае, когда g принадлежит однопараметрической подгруппе $\exp(i\beta\tilde{K}_2)$, матричные элементы

$$D_{xx'}^{\nu}\begin{pmatrix} \exp(-\beta/2) & 0 \\ 0 & \exp(\beta/2) \end{pmatrix} = e^{i\beta x}\,\delta(x-x'). \qquad /15/$$

что приводит к интегральному представлению для матричных элементов буста в $SO(2)$ базисе

$$D_{nn'}^{\nu}\begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{pmatrix} = (-i)^n i^{n'} \frac{n!n'!}{\gamma_{nn'}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho^{(\nu)}(x) P_n^{\nu}(x;\frac{\pi}{2}) e^{ix\beta} P_{n'}^{\nu}(x;\frac{\pi}{2}), \qquad /15/$$

где $\gamma_{nn'} = [n!n'!\Gamma(n+2\nu)\Gamma(n'+2\nu)]^{1/2}$. Интегральное представление /15/ позволяет легко получить известное аналитическое выражение [11]

$$D_{nn'}^{\nu}\begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{n'}}{\gamma_{nn'}}\Gamma(2\nu+n+n') \frac{\operatorname{th}^{n+n'}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ch}^{2\nu}\frac{\beta}{2}} F(-n,-n';1-2\nu-n-n';\operatorname{cth}^2\frac{\beta}{2}). \qquad /16/$$

Действительно, как следует из определения веса $\rho^{(\nu)}(x)$ для полиномов Поллачека $P_n^{\nu}(x;\pi/2)$, в формуле /15/ при $\beta>0$ ($\beta<0$) интеграл можно замкнуть в верхней /нижней/ части комплексной плоскости $z=x+iy$, сведя его к сумме вычетов подынтегральной функции в точках $z_k=i(\nu+k)$, $k=0,1,2,\ldots$ /при $\beta<0$ в точках z_k^* /, т.е.

$$D^{\nu}_{nn'}\begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2}\end{pmatrix} = i^{n'}(-i)^n 2^{2\nu}\frac{n!n'!}{\gamma_{nn'}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Gamma(\nu-iz_k)P_n^{\nu}(z_k;\frac{\pi}{2})e^{i\beta z_k}\cdot$$

$$\cdot P^{\nu}_{n'}(z_k;\frac{\pi}{2}).$$

Воспользовавшись теперь соотношением $n!P_n^{\nu}(z_k;\frac{\pi}{2})=i^n\mathfrak{M}_n^{(2\nu,-1)}(k)$, где $\mathfrak{M}_n^{(2\nu,-1)}(k)$ являются аналитическим продолжением полиномов Мейкснера $\mathfrak{M}_n^{(\gamma,\mu)}(z)$ по параметру μ /см.[12] /, получим

$$D^{\nu}_{nn'}\begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2}\end{pmatrix} = \frac{(-1)^{n'}}{\gamma_{nn'}}2^{2\nu}e^{-\nu\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Gamma(2\nu+k)e^{-k\beta}\mathfrak{M}_n^{(2\nu,-1)}(k)\cdot$$

$$\cdot\mathfrak{M}_{n'}^{(2\nu,-1)}(k). \qquad /15'/$$

Поскольку /доказательство этого утверждения приведено в[13] /

$$2^{2\nu}e^{-\nu\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Gamma(2\nu+k)e^{-k\beta}\mathfrak{M}_n^{(2\nu,-1)}(k)\mathfrak{M}_{n'}^{(2\nu,-1)}(k)=$$

$$=\Gamma(2\nu+n+n')\,\mathrm{th}^{n+n'}\frac{\beta}{2}\left[\mathrm{ch}\frac{\beta}{2}\right]^{-2\nu}F(-n,-n';1-2\nu-n-n';\mathrm{cth}^2\frac{\beta}{2}),$$

то мы действительно приходим к равенству /16/.

Таким образом, мы видим, что использование волновых функций линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном x-представлении позволяет получить простые формулы для описания дискретной серии $D^{\pm}(\nu)$ НУП универсальной накрывающей группы $\widetilde{SL}(2,R)$.

Мы благодарны В.Г.Кадышевскому, В.Ласснеру, В.И.Манько, М.В.Савельеву и С.К.Суслову за полезные обсуждения.

Литература

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, B6, p.125.
3. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. ТМФ,1980, 44, с.47.
4. Атакишиев Н.М. ТМФ, 1984, 58, с.254.
5. Atakishiyev N.M., Mir-Kasimov R.M. JINR, E2-85-214, Dubna, 1985.
6. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, 55A, p.233.
7. Basu D., Wolf K.B. J.Math.Phys., 1982, 23, p.189.
8. Виленкин Н.Я.Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965.
9. Barut A.O., Phillips E.C. Commun. Math.Phys., 1968, 8, p.52.
10. Kuriyan J.G., Mukunda N., Sudarshan E.C.G. JMP, 1968, 9, p.2100.
11. Bargmann V. Ann.Math., 1947, 48, p.568.
12. Atakishiyev N.M., Suslov S.K. Institut für Hochenevgiephysik, PHE 84-12, Berlin-Zeuthen, 1984.
13. Атакишиев Н.М. Институт физики АН АзССР, № 127, Баку, 1985.

Рукопись поступила 26 июня 1985 года